

به نام خدا

دانش گاه الزهرا - تیر ۹۱

امتحان پایان ترم مکانیک تحلیلی II

مسئله 1) تانسور ماند جسمی در دستگاه مختصات دکارتی (xyz)

$$\mathbf{I} = ma^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

است. اگر بردار سرعت زاویه‌ای ω اولیه‌ی این جسم $\omega|_{t=0} = \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ باشد،

(a) انرژی جنبشی ω اولیه‌ی جسم چه قدر است؟

(b) بردار تکانه زاویه‌ای ω اولیه‌ی آن چه قدر است؟

(c) آیا بردار تکانه زاویه‌ای ω جسم با گذشت زمان عوض می‌شود؟ چرا؟

مسئله 2) در کلاس درس در بحث زوایای اویلر چارچوب 123 چسبیده به جسم و چارچوب xyz را چارچوب ساکن گرفتیم. مؤلفه‌های بردار ω بردار سرعت زاویه‌ای ω نسبت به چارچوب xyz را در چارچوب‌های 123 و xyz ، بر حسب زوایای اویلر، (ψ, θ, ϕ) ، و مشتقات زمانی آن‌ها، $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$ به دست آورید.

مسئله 3) لختی I دورانی جسمی حول محوره‌های اصلی I_1, I_2, I_3 است. چارچوب 123 با بردار یکه‌های e_1, e_2, e_3 محوره‌های اصلی جسم هستند. اندازه‌ی سرعت زاویه‌ای ω نسبت به دستگاه S ، با بردار یکه‌های ثابت i, j, k است. رابطه‌ی بین بردارهای یکه‌ی دستگاه جسم و دستگاه S به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t - \frac{1}{2} \sin \omega t\right) \mathbf{i} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t + \frac{1}{2} \sin \omega t\right) \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t \mathbf{k} \\ e_2 &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t - \frac{1}{2} \cos \omega t\right) \mathbf{i} + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \omega t + \frac{1}{2} \cos \omega t\right) \mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t \mathbf{k} \\ e_3 &= \frac{\mathbf{i}}{2} - \frac{\mathbf{j}}{2} + \frac{\mathbf{k}}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(a) بردار سرعت زاویه‌ای ω چارچوب 123 چسبیده به جسم نسبت به چارچوب S کدام است؟

راه‌نمایی: بردارهایی چسبیده به جسم در راستای بردار سرعت زاویه‌ای جسم ω باشند با گذشت زمان عوض نمی‌شوند.

(b) گشتاور وارد بر جسم و تکانه زاویه‌ای جسم را در چارچوب 123 چسبیده به جسم را در زمان t به دست

آورید.